

NOV. 1970



ICAS Paper No. 70-30

**PRESSION INDUITE SUR UNE SURFACE PORTANTE
PAR UNE TURBULENCE ATMOSPHERIQUE ISOTROPE**

by

Gabriel Coupry

Directeur Scientifique de la Resistance des Structures

O. N. E. R. A.

(Office National d'Etudes et de Recherches Aeronautiques)

Chatillon-sous-Bagneux, France

The Seventh Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE, ROMA, ITALY / SEPTEMBER 14-18, 1970

Price: 400 Lire

PRESSION INDUITE SUR UNE SURFACE PORTANTE PAR UNE TURBULENCE ATMOSPHERIQUE
ISOTROPE

G. Coupry
Directeur Scientifique
Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
92 - Châtillon - France

Résumé

La théorie aérodynamique de la surface portante est rappelée, et il est montré que l'inversion de l'équation intégrale qui lui est associée permet une évaluation approchée de la fonction de Green du problème. Il est dès lors possible de calculer la densité spectrale croisée de pression induite sur l'aile par la composante verticale d'une turbulence isotrope de spectre connu, sans plus de difficulté que lors des calculs usuels effectués à partir de l'hypothèse simplificatrice d'une turbulence uniforme en envergure. Un calcul de la fonction de transfert de "CONCORDE" à la turbulence est effectué par les deux méthodes.

PRESSURE FIELD INDUCED ON A LIFTING SURFACE
BY AN ISOTROPIC ATMOSPHERIC TURBULENCE

Summary

The reader is reminded the lifting surface theory and the integral equation which relates the pressure field to the angle of attack of the wing. The solution of this integral equation is shown to give an approximate Green function of the problem. This provides a method for computing the cross power spectrum of the pressure field induced by an isotropic atmospheric turbulence, once the cross power spectrum of the vertical component of turbulence is given. The method is in no way more complicated than the one which relies on the assumption of uniformity of turbulence in span. As an example, the transfer function of CONCORDE to turbulence has been computed by both techniques.

Notations

- V_0 Vitesse de l'avion,
 $\phi_k^{(M)}$ Forme propre du mode k ,
 μ_{kk} Masse généralisée du mode k ,
 α_k Amortissement réduit du mode k ,
 ω_k Pulsation propre du mode k ,
 γ_{kk} Raideur généralisée du mode k ,
 $C_{kp}(t)$ Réponse du mode k à une excitation impulsionnelle du mode P ,
 q_P Coordonnée généralisée relative au mode P ,
 $Q_k(t)$ Force généralisée sur le mode k ,
 $[X_{ke}]$ Matrice d'éléments X_{ke} ,
 $[X_i]$ Colonne d'éléments X_i ,
 $\tilde{X}(\omega)$ Transformée de Fourier de $X(t)$,
 $R_w(M,t)$ Pression au point M au temps t induite par la turbulence,
 $\tilde{T}_{k\eta}(\omega)$ Fonction de transfert du mode k à l'excitation du mode η ,
 $R_{xy}(T)$ Corrélacion entre les processus et X, Y
 $\tilde{R}_{xy}(\omega)$ Densité spectrale croisée entre les processus X et Y .

Introduction

La turbulence atmosphérique rencontrée par les avions commerciaux a une importance de plus en plus grande sur le comportement de leurs structures à la fatigue et pose par ailleurs de sérieux problèmes de maniabilité et de confort. Cette évolution a essentiellement pour origine l'augmentation de la vitesse de croisière et de la capacité de transport, et est particulièrement remarquable pour les avions les plus modernes, tels que le CONCORDE, le BOEING 747, l'AIRBUS, Du fait de l'augmentation de la vitesse, c'est la partie du spectre qui correspond aux grandes longueurs d'onde, les plus riches en énergie, qui est responsable de l'excitation de l'avion. En même temps, l'accroissement des dimensions de la structure a les mêmes conséquences, puisqu'il se traduit par une diminution des fréquences propres de la Mécanique du Vol et des modes de flexibilité.

Il est impératif, dans ces conditions, de pouvoir calculer avec précision quelle sera la réponse de l'avion à la turbulence atmosphérique, ou, plutôt, quelles seront les caractéristiques statistiques de sa réponse à une turbulence de caractéristiques statistiques connues. Une telle prévision nécessite la connaissance d'un modèle de la turbulence et l'évaluation de la fonction de transfert de l'avion. La théorie du transfert linéaire permet dès lors un calcul aisé des propriétés de la réponse.

Après une longue période de tâtonnement, un accord paraît acquis sur un modèle représentatif de la turbulence atmosphérique ; la turbulence est considérée, depuis H. Press (1) comme un processus localement stationnaire et gaussien, c'est-à-dire comme une succession de "pavés", dont chacun est supposé stationnaire et gaussien, et qui ne diffèrent que par leur écart type relatif. La densité spectrale de puissance de chacun de ces "pavés" est affine à une densité spectrale standard, dont l'expérience permet d'assurer qu'elle est bien représentée par le modèle de Karman, avec une échelle fonction de l'altitude (2-3). Le processus d'excitation est alors parfaitement déterminé dès que l'on dispose d'une distribution des écarts types locaux. Sur ce dernier point, l'information acquise par l'analyse des enregistrements V.C.H. sur avions de ligne est encore insuffisante, et des divergences apparaissent encore entre les distributions statistiques proposées aux divers Bureaux d'études. Une collaboration internationale, établie dans le cadre de l'A.G.A.R.D., doit remettre prochainement de l'ordre dans ce domaine.

Les calculs de fonctions de transfert se développent depuis quelques années, en vue de bénéficier des avantages que présente une représentation continue de la turbulence, telle que celle que nous venons d'exposer brièvement. Cette approche est encore menée par beaucoup de Constructeurs en parallèle avec la méthode plus ancienne qui consiste à évaluer la réponse de l'avion à des rafales isolées de forme standard, dont on suppose connue la distribution statistique.

Les calculs de fonctions de transfert ont été la plupart du temps effectués en supposant la turbulence uniforme en envergure, c'est-à-dire en admettant que l'avion rencontrait, en tous les points le long de l'aile, au même instant, une même composante verticale W de perturbation. Un tel schéma de calcul reste très valable tant qu'on ne s'intéresse qu'aux réponses à basse fréquence, et pour des conditions de vol pour lesquelles l'échelle de la turbulence est très grande par rapport aux dimensions transverses de l'avion. Les premières comparaisons entre fonctions de transfert calculées et mesurées en vol ont en effet montré un bon accord (Fig.1), dans le domaine de la Mécanique du Vol ; par contre, dès que l'on s'intéresse à la réponse de modes de fréquence relativement élevée, des désaccords importants apparaissent (Fig.2). Par ailleurs, l'analyse théorique fait apparaître une incohérence entre le choix d'un modèle de turbulence associé à une turbulence isotrope (modèle Karman), et une méthode de calcul qui considère que la turbulence n'est pas isotrope.

Le seul remède susceptible d'être apporté à ces difficultés consiste à définir une méthode de calcul du transfert en turbulence isotrope. Il sera montré dans cette communication qu'une telle méthode, fondée sur l'application de la théorie de la surface portante, ne présente guère plus de complication que le schéma développé à partir d'une turbulence uniforme. Les calculs ne nécessitent que la connaissance des coefficients d'influence aérodynamiques, qui sont mis en mémoire lors des calculs de flottement.

Dans la première partie, le calcul formel du transfert sera explicité en fonction de la densité spectrale croisée de pression sur l'aile ; la seconde partie sera consacrée à un rappel de la théorie de la surface portante ; la troisième partie traitera du calcul du transfert en turbulence isotrope et de la comparaison des calculs effectués suivant les deux méthodes.

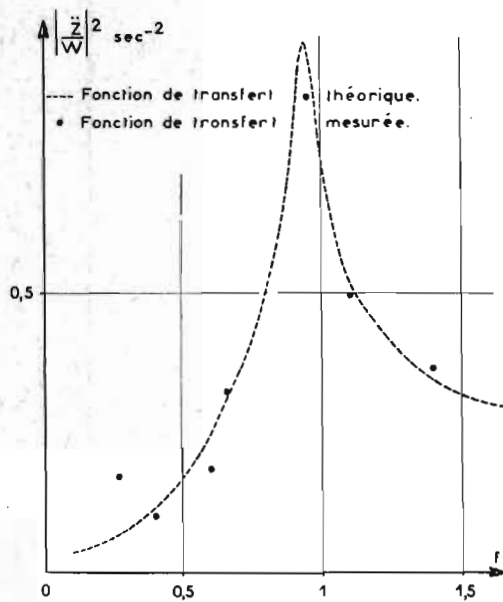


Figure 1. Mirage III M=0,80

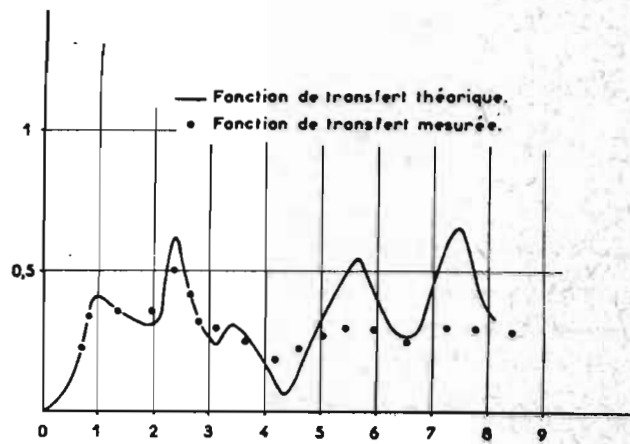


Figure 2. Transall. V=420 km/h.

I. Calcul formel du transfert

I.1. Equations générales du mouvement

Utilisant la base des modes propres orthogonaux de la structure au sol (modes d'ensemble et modes de déformation) on peut représenter le déplacement de tout point M de la structure par la série :

$$z(M, t) = \sum_k q_k(t) \phi_k(M) \quad (1)$$

Chaque mode est caractérisé par sa pulsation propre ω_k , sa masse généralisée μ_{kk} , sa raideur généralisée γ_{kk} , son amortissement réduit α_k et sa forme propre $\phi_k(M)$.

Lorsque la structure est en vol, les efforts aérodynamiques qu'elle subit sont dus à un champ de pression $P(M, t)$ qui est la superposition du champ de pression $P_D(M, t)$ induit par les déplacements des points de la cellule, et du champ de pression $P_W(M, t)$ induit par la turbulence sur la structure figée dans un vol uniforme à vitesse V_0 . Son comportement est décrit par l'équation matricielle d'ordre infini :

$$[\mu_{kk}] [\ddot{q}_p] + 2 \alpha_k \omega_k [\mu_{kk}] [\dot{q}_k] + [\gamma_{kk} \delta(t) - C_{kp}(t)] * [q_p] = [Q_{kp}] \quad (2)$$

où, $A_k(M, t)$ représentant le champ de pression consécutif à un déplacement impulsionnel du mode k , $C_{kp}(t)$ et $Q_k(t)$ sont respectivement les forces généralisées

$$C_{kp}(t) = \iint_A A_k(M, t) \phi_p(M) dM; Q_k(t) = \iint_A P_w(M, t) \phi_k(M) dM$$

Notant d'une manière générale par $\tilde{X}(\omega)$ la transformée de Fourier de $X(t)$, et transformant l'équation (2), on obtient :

$$[\tilde{D}_{ij}(\omega)] [\tilde{q}_k] = [\tilde{Q}_k] \quad (3)$$

où $[\tilde{D}(\omega)]$ est la matrice d'éléments :

$$\tilde{D}_{kp}(\omega) = -\mu_{kk} \delta_{kk} \omega^2 + 2 i \mu_{kk} \omega_k \alpha_k \delta_{kp} \omega + \gamma_{pp} \delta_{kp} - \tilde{C}_{kp}(\omega)$$

dont les coefficients aérodynamiques $\tilde{C}_{kp}(\omega)$ sont évalués à l'occasion de tout calcul de flottement.

Notant par $\tilde{T}(\omega)$ l'inverse de la matrice connue $\tilde{D}(\omega)$, on déduit de (3) :

$$[\tilde{q}_k] = [\tilde{T}(\omega)][Q_k] \quad (4)$$

ou, sous forme temporelle :

$$[q_k] = [T_{kp}(t)] * [Q_p] \quad (5)$$

I.2. Méthode de calcul du transfert

La réponse de l'avion à la turbulence est un processus aléatoire que l'on supposera, comme la turbulence elle-même, localement stationnaire et gaussien. On effectuera tout d'abord, grâce à la formule (1), le calcul de la corrélation $R_{zz}(M, t)$ de la réponse $Z(M, t)$ au point M . Il vient :

$$R_{zz}(M, \tau) = \sum_{k,p} \phi_k(M) \phi_p(M) q_k(t) q_p(t+\tau) = \sum_{k,p} \phi_k(M) \phi_p(M) R_{q_k q_p}(\tau) \quad (6)$$

où $R_{q_k q_p}(\tau)$ est la corrélation croisée de coordonnées généralisées.

Partant de l'équation (5), en explicitant la convolution, on peut alors écrire :

$$q_k(t) = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} T_{kn}(\alpha) Q_n(t-\alpha) d\alpha; \quad q_p(t+\tau) = \sum_s \int_{-\infty}^{+\infty} T_{ps}(\beta) Q_s(t+\tau-\beta) d\beta$$

On en déduit que :

$$R_{q_k q_p}(\tau) = \sum_{n,s} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{kn}(\alpha) T_{ps}(\beta) \overline{Q_n(t-\alpha) Q_s(t+\tau-\beta)} d\alpha d\beta$$

Soit, en introduisant la corrélation croisée $R_{\varphi_n \varphi_s}(\tau)$ de force généralisée et en précisant les convolutions :

$$R_{q_k q_p}(\tau) = \sum_{n,s} T_{kn}(-\tau) * T_{ps}(\tau) * R_{Q_n Q_s}(\tau) \quad (7)$$

On remarque alors que, par définition :

$$Q_n(t) = \iint_A P_w(\mu, t) \phi_n(\mu) d\mu$$

$$Q_s(t+\tau) = \iint_A P_w(\mu', t+\tau) \phi_s(\mu') d\mu'$$

D'où :

$$R_{Q_n Q_s}(\tau) = \iint_A \iint_A R_p(\mu, \mu', \tau) \phi_n(\mu) \phi_s(\mu') d\mu d\mu' \quad (8)$$

où

$$R_p(\mu, \mu', \tau) = \overline{P_w(\mu, t) P_w(\mu', t+\tau)}$$

est la corrélation spatio-temporelle de pression induite par la turbulence.

Partant des équations (6), (7) et (8), on exprime finalement la corrélation de la réponse en fonction de la corrélation spatio-temporelle de pression de l'aile :

$$R_{zz}(M, t) = \sum_{k,p,r,s} \phi_k(M) \phi_p(M) T_{kr}(-t) * T_{ps}(t) * \iint_A \iint_A R_p(\mu, \mu', t) \phi_r(\mu) \phi_s(\mu') d\mu d\mu'$$

Après transformation de Fourier, on en déduit la densité spectrale de puissance de la réponse du point M en fonction de la densité spectrale croisée de pression sur la voilure :

$$R_{zz}(M, \omega) = \sum_{k,p,r,s} \phi_k(M) \phi_p(M) \tilde{T}_{ps}^*(\omega) \iint_A \iint_A \tilde{R}_p(\mu, \mu', \omega) \phi_r(\mu) \phi_s(\mu') d\mu d\mu' \quad (9)$$

L'équation (9) comprend les fonctions $\phi_k(M)$ et $\tilde{T}_{ps}(\omega)$ qui sont connues à l'occasion de tout calcul de flottement ; elle détermine donc complètement la densité spectrale de puissance de la réponse en fonction de la densité spectrale croisée de pression sur l'aile.

Le développement de toute évaluation prévisionnelle implique donc le calcul de la densité spectrale croisée de pression induite sur la voilure par la turbulence atmosphérique. Ainsi que nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, il a semblé pendant longtemps que ce calcul était plus simple si on considérait la turbulence comme uniforme en envergure.

Nous allons, après un rappel de la théorie de la surface portante, montrer qu'on peut évaluer sans plus de difficulté $\tilde{R}_p(\mu, \mu', \omega)$ dans le cas, plus représentatif, d'une turbulence isotrope.

II. Théorie de la "surface portante"

II.1. Rappel de la méthode classique

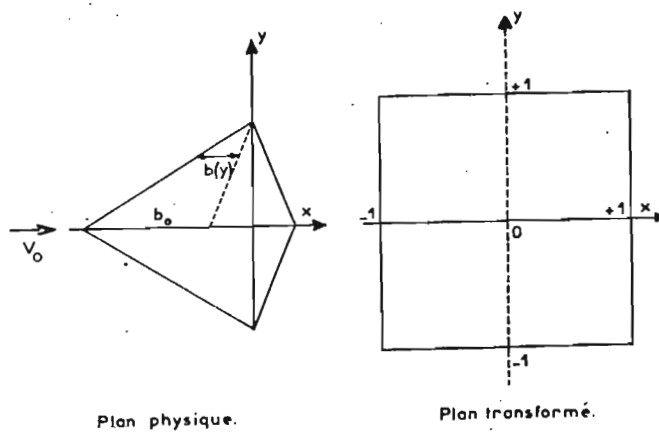


Figure 3.

Dans la théorie de la surface portante, il est nécessaire de faire correspondre à l'aile, par un changement de variable appropriée, le carré de côtés ($x = -1$; $x = +1$; $y = -1$; $y = +1$). Nous noterons F' dans le plan transformé toute grandeur précédemment notée F dans le plan physique. Dans ces conditions, l'équation intégrale qui permet le calcul du champ de pression $\tilde{C}'(x, y, \omega)$ induit par une distribution périodique $\tilde{\alpha}'(x, y, \omega)$ d'angle d'attaque sur l'aile s'écrit :

$$\tilde{\alpha}'(x, y, \omega) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tilde{k}'(x, y; \xi, \eta; \omega) \tilde{c}'(\xi, \eta, \omega) d\xi d\eta \quad (10)$$

Le noyau $\tilde{k}'(x, y; \xi, \eta; \omega)$ a une expression fort complexe et présente un pôle d'ordre deux en $y - \eta$ qui impose une intégration en partie finie.

La méthode usuelle utilisée pour résoudre cette équation intégrale est la méthode de collocation, qui consiste à se fixer l'angle d'attaque en N points (x_p, y_p) , et à représenter le champ de pression sous la forme :

$$\tilde{c}'(x, y, \omega) = \frac{b_0}{b(y)} \sqrt{1-y^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} U(x, y) \quad (11)$$

Cette expression rend compte de la singularité de bord d'attaque et de l'annulation de la pression au bord de fuite et sur les bords latéraux de l'aile. La fonction $U(x, y)$, qui ne présente pas de singularités, peut elle-même être représentée par un développement limité d'ordre N de polynômes :

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^N \beta_n P_n(x, y) \quad (12)$$

On démontre alors sans difficulté que la résolution de l'équation intégrale (10) se ramène à l'inversion de l'équation matricielle :

$$[\alpha_p] = [k'_{pq}] [\beta_q] \quad (12')$$

la matrice $[k'_{pq}]$ étant la matrice d'éléments :

$$k'_{pq} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{b_0 \sqrt{1-\eta^2}}{b(\eta)} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \tilde{k}'(x_p, y_p; \xi, \eta; \omega) P_q(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (13)$$

et la colonne $[\alpha_p]$ ayant pour éléments :

$$\alpha_p = \tilde{\alpha}'(x_p, y_p; \omega)$$

L'équation (12') peut être inversée sous la forme :

$$[\beta_p] = [k'_{pq}]^{-1} [\alpha_q] = [G_{pq}] [\alpha_q]$$

et le champ de pression s'explique par :

$$\tilde{c}'(x, y, \omega) = \frac{b_0}{b(y)} \sqrt{1-y^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{p,q}^N G_{pq} \tilde{\alpha}'(x_p, y_p, \omega) P_q(x, y) \quad (14)$$

II.2. Symétrisation de la méthode

DAT, DAROVSKY et DARRAS (4) ont montré qu'on améliorerait la convergence de la méthode de la surface portante si on projetait simultanément dans la même base la distribution connue d'angle d'attaque et la partie uniforme $U(x, y)$ du champ de pression inconnu. En raison des difficultés particulières à l'application de cette théorie au calcul du champ de pression induit par la turbulence, il semble utile dans ce cas de développer la méthode symétrique.

On est ainsi amené à représenter $\tilde{\alpha}'(x, y, \omega)$ et $U(x, y)$ par les développements limités :

$$\tilde{\alpha}'(x, y, \omega) = \sum_{k=1}^N \lambda_k P_k(-x, y); \quad U(x, y) = \sum_{p=1}^N \beta_p P_p(x, y) \quad (15)$$

Les polynômes $P_k(x, y)$ sont pris de la forme :

$$P_k(x, y) = F_i(x) H_j(y)$$

les polynômes F_i et H_j étant orthonormés au sens des métriques respectives :

$$\langle F(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} F(x) g(x) dx$$

$$\ll \Psi(y), \Phi(y) \gg = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-y^2} \Psi(y) \Phi(y) dy$$

Reportant les expressions (15) dans l'équation intégrale (10), on aboutit à l'équation matricielle :

$$[\lambda_k] = [k''_{kp}] [\beta_p] \quad (16)$$

La colonne $[\lambda_k]$ est formée des éléments connus :

$$\lambda_k = \iint_{-1}^{+1} \sqrt{1-y^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} P_k(-x, y) \tilde{\alpha}'(x, y, \omega) dx dy$$

et la matrice $[k''_{kp}]$ est la matrice d'éléments :

$$k''_{kp} = \iint_{-1}^{+1} \sqrt{1-y^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} P_p(x, y) \iint_{-1}^{+1} \frac{b_0}{b(\eta)} \tilde{k}'(x, y; \xi, \eta; \omega) \sqrt{1-\eta^2} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} P_k(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy \quad (17)$$

L'inversion de la relation matricielle (16) fournit la colonne inconnue $[\beta_p]$:

$$[\beta_p] = [k''_{pk}]^{-1} [\lambda_k] = [G'_{pk}] [\lambda_k]$$

Le problème est alors résolu, et le champ de pression s'explique sous la forme :

$$\tilde{C}'(x, y, \omega) = \frac{b_0}{b(y)} \sqrt{1-y^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{k,p}^N G'_{pk} \lambda_k P_p(x, y) \quad (18)$$

L'intérêt de cette méthode symétrique réside dans le fait que les auteurs ont montré que la matrice $[k''_{kp}]$ avait une structure presque diagonale. La limitation au rang N du développement limité peut alors être justifiée, et l'erreur résultante sur la matrice inverse $[G'_{pk}]$ peut être appréciée. La convergence des solutions est par ailleurs très améliorée.

III. Champ de pression induit par une turbulence isotrope

III.1. Approche directe

La formule (14) donne, sous forme discrète, la résolution de l'équation intégrale (10) de la théorie de la surface portante. Elle correspond, dans le plan transformé, à l'existence d'une fonction d'influence aérodynamique $\tilde{G}'(M, \mu; \omega)$ telle que :

$$\tilde{C}'(x, y, \omega) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tilde{G}'(x, y; \xi, \eta; \omega) \tilde{\alpha}'(\xi, \eta, \omega) d\xi d\eta$$

Il lui correspondra, dans le plan physique, la relation intégrale qui définit le champ de pression, soit :

$$\tilde{P}(M, \omega) = \iint_A \tilde{G}(M, \mu; \omega) \tilde{\alpha}(\mu, \omega) d\mu.$$

et, par inversion de Fourier, la relation temporelle :

$$P(M, t) = \iint_A \int_{-\infty}^{+\infty} G(M, \mu; \lambda) \alpha(\mu, t - \lambda) d\lambda d\mu.$$

Dans le cas d'une excitation turbulente, l'angle d'attaque est égal à w/V_0 et :

$$\begin{cases} P(M, t) = \frac{1}{V_0} \iint_A \int_{-\infty}^{+\infty} G(M, \mu; \lambda) w(\mu, t - \lambda) d\lambda d\mu \\ P(M', t + \tau) = \frac{1}{V_0} \iint_A \int_{-\infty}^{+\infty} G(M', \mu'; \lambda') w(\mu', t + \tau - \lambda') d\lambda' d\mu' \end{cases} \quad (19)$$

On en déduit la corrélation spatio-temporelle de pression :

$$R_p(M, M', \tau) = \frac{1}{V_0^2} \iint_A \iint_A G(M, \mu, -\tau) \otimes G(M', \mu', \tau) \otimes R_w(\mu, \mu', \tau) d\mu d\mu' \quad (20)$$

et par transformation de Fourier, la densité spectrale croisée de pression :

$$\tilde{R}_p(M, M', \omega) = \frac{1}{V_0^2} \iint_A \iint_A \tilde{G}^*(M, \mu, \omega) \tilde{G}(M', \mu', \omega) \tilde{R}_w(\mu, \mu', \omega) d\mu d\mu' \quad (21)$$

Le problème est dès lors complètement résolu, du fait que la densité spectrale croisée de turbulence se déduit, par une propriété très simple de la transformée de Fourier, à partir de la densité spectrale directe $\tilde{S}_w(\omega)$ prise comme modèle, dans le cas où la turbulence est isotrope et satisfait à l'hypothèse de Taylor. On a alors en effet :

$$R_w(\mu, \mu', \tau) = S_w \left(\sqrt{\left(\tau - \frac{x - x'}{V_0}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{V_0}\right)^2} \right)$$

et :

$$R_w(\mu, \mu', \omega) = \exp\left(-i\omega \frac{(x - x')}{V_0}\right) \left[\tilde{S}_w(\omega) - \frac{|y - y'|}{V_0} \int_0^{+\infty} \left(\frac{|y - y'|}{V_0} - \nu\right) S_w(\sqrt{\omega^2 + \nu^2}) d\nu \right] \quad (22)$$

Cette méthode est bien une méthode qui permet de calculer directement le champ de pression induit par une turbulence isotrope, à partir de l'approximation que donne la méthode de collocation pour la fonction d'influence aérodynamique. Les difficultés qui peuvent subsister sont inhérentes à la méthode de collocation, et sont susceptibles d'être amplifiées du fait de la structure de l'équation (21).

III.2. Calcul par une équation intégrale

L'équation intégrale (10), traduite dans le plan physique après inversion de Fourier, s'écrit sous la forme :

$$\alpha(M, t) = \iint_A \int_{-\infty}^{+\infty} k(M, \mu, \lambda) p(\mu, t - \lambda) d\lambda d\mu$$

De même :

$$\alpha(M', t + \tau) = \iint_A \int_{-\infty}^{+\infty} k(M', \mu', \lambda') p(\mu', t + \tau - \lambda') d\lambda' d\mu'$$

On en déduit, dans le cas où l'angle d'attaque est induit par la turbulence, la relation intégrale liant la corrélation spatio-temporelle de turbulence à la corrélation spatio-temporelle de pression sur l'aile :

$$R_w(M, M', \tau) = V_0^2 \iint_A \iint_A k(M, \mu, -\tau) * k(M', \mu', \tau) * R_p(\mu, \mu', \tau) d\mu d\mu'$$

et, après transformation de Fourier :

$$\tilde{R}_w(M, M', \omega) = V_0^2 \iint_A \iint_A \tilde{k}^*(M, \mu, \omega) \tilde{k}(M', \mu', \omega) \tilde{R}_p(\mu, \mu', \omega) d\mu d\mu' \quad (23)$$

Soit, en revenant au plan transformé et en explicitant :

$$\tilde{R}'_w(x, y; x', y'; \omega) = V_0^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tilde{k}^*(x, y; \xi, \eta; \omega) \tilde{k}(x', y'; \xi', \eta'; \omega) \tilde{R}'_p(\xi, \eta; \xi', \eta'; \omega) d\xi d\eta d\xi' d\eta' \quad (24)$$

Comme \tilde{R}'_w est connu par la formule (22), la résolution de cette équation intégrale permet théoriquement le calcul de la densité spectrale croisée de pression sur la voilure. Malgré son aspect peu engageant, nous allons montrer qu'elle peut être résolue sans plus de difficulté que l'équation (10), du fait que son noyau est factorisé.

Pour commencer, on représente la densité spectrale croisée de puissance, qui est inconnue, sous la forme :

$$\tilde{R}'_p(\xi, \eta; \xi', \eta'; \omega) = \frac{b_0^2}{b(\eta)b(\eta')} \sqrt{(1-\eta^2)(1-\eta'^2)} \sqrt{\frac{(1-\xi)(1-\xi')}{(1+\xi)(1+\xi')}} U(\xi, \eta; \xi', \eta') \quad (25)$$

La fonction $U(\xi, \eta; \xi', \eta')$, qui ne comprend aucune singularité, sera développée à partir de la base de polynômes utilisés dans la théorie de surface portante :

$$U(\xi, \eta; \xi', \eta') = \sum_{k, \ell} \beta_{k\ell} P_k(\xi, \eta) P_\ell(\xi', \eta') \quad (26)$$

On fera de même pour la densité spectrale croisée de turbulence :

$$\tilde{R}'_w(x, y; x', y', \omega) = \sum_{r, s} \lambda_{rs} P_r(x, y) P_s(x', y') \quad (27)$$

et, reportant ces deux expressions dans l'équation intégrale (24), on obtient l'équation matricielle :

$$[\lambda_{rs}] = [K''_{rk}] [\beta_{k\ell}] [K''_{\ell s}]$$

qui, après inversion, résout le problème, puisqu'elle exprime la matrice inconnue $[\beta_{k\ell}]$ en fonction de la matrice connue $[\lambda_{rs}]$:

$$[\beta_{k\ell}] = [K''_{\ell s}]^{-1} [\lambda_{rs}] [K''_{rk}]^{-1} \quad (28)$$

La matrice $[K''_{\ell s}]$ est la matrice qui intervenait dans la formule (16) de la théorie symétrique de la surface portante ; elle est donc connue déjà à l'occasion des calculs de flottement. La matrice $[\lambda_{rs}]$ est la matrice des projections de $\tilde{R}'_w(M, M', \omega)$ sur la base des polynômes $P_r(M)$ et $P_s(M')$. Le problème est donc complètement résolu, et l'utilisation d'une méthode symétrique, avec des matrices $[K''_{\ell s}]$ presque diagonales, assure une bonne convergence de la méthode. On obtient finalement :

$$\tilde{R}'_p(x, y; x', y', \omega) = \frac{b_0^2}{b(y)b(y')} \sqrt{(1-y^2)(1-y'^2)} \sqrt{\frac{(1-x)(1-x')}{(1+x)(1+x')}} \sum_{k, \ell, r, s}^N G'_{kr} \lambda_{rs} G_{s\ell} P_k(x, y) P_\ell(x', y') \quad (29)$$

La seule complication qui apparaisse par rapport à un calcul effectué en supposant la turbulence uniforme en envergure réside dans l'explicitation de $\tilde{R}'_w(\mu, \mu', \omega)$ par la formule (22).

IV. Conclusions

Des raisonnements très généraux, fondés sur le modèle spectral de Taylor, qui rend compte de modes particuliers tels que ceux de Dryden et de Karman, permettent de préciser que la longueur de cohérence transverse apparente de la turbulence, pour un avion qui vole à une vitesse V_0 , est de l'ordre de :

$$1,5 \frac{V_0}{\omega}$$

Il apparaît dès lors que tout calcul en turbulence uniforme perd son sens dès que l'on s'intéresse aux modes de déformation de la structure, bien qu'il garde en général sa représentativité dans le domaine de la mécanique du Vol.

La méthode que nous venons de décrire a été programmée à l'O.N.S.M.A., et nous donnons, à titre d'exemple, la comparaison entre les densités

spectrales de réponse de CONCORD, calculées à Mach 0,4 et Mach 0,8 (Fig. 4 et 5) par les méthodes de la turbulence uniforme et de la turbulence isotrope.

La différence est spectaculaire, en particulier à Mach 0,4, et entraîne des erreurs de plus de 100 % sur l'appréciation des nombres caractéristiques A et N_0 de la réponse.

Il apparaît donc nécessaire, lors du calcul de la réponse d'un avion à la turbulence, de calculer cette réponse en supposant la turbulence isotrope. Le programme, ainsi que nous l'avons montré, ne présente guère de complication par rapport aux programmes utilisés jusqu'ici.

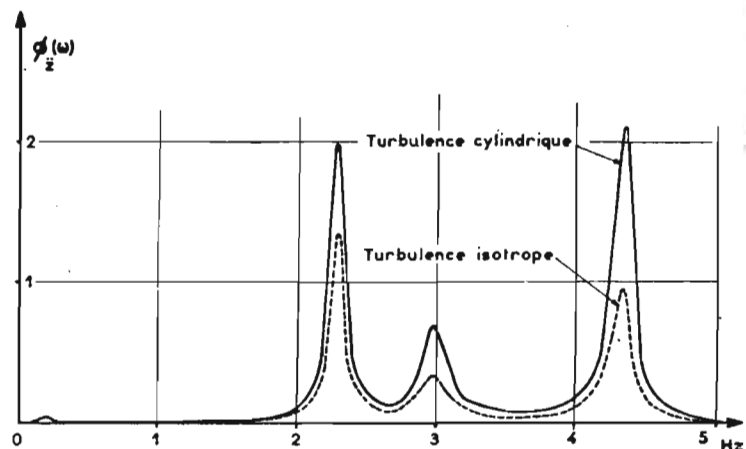


Figure 4

Avion Concorde $M=0,4$ Echelle de turbulence: 105 m.

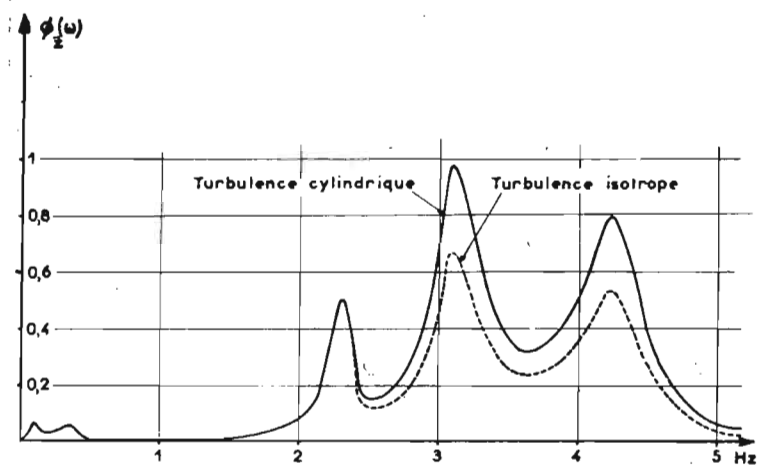


Figure 5.

Avion Concorde $M=0,8$ Echelle de turbulence 200m.

Bibliographie

- (1) H. PRESS - An Approach of the Prediction of the frequency distribution of Gust Loads on Airplanes in normal operations. N.A.C.A., TN 2660, 1952.
- (2) J.B. DEMPSTER et C.A. BELL - Summary of flight load environmental data taken on B 52 fleet aircraft. A.I.A.A. Paper 64-165 - 1964
- (3) J.R. FIREBAUGH - Evaluations of a spectral gust model using V.G.H. and V.G. flight data. Journal of Aircraft -Vol.4 - N° 6 - Nov.-Dec. 1967.
- (4) R. DAT, L. DAROVSKY et B. DARRAS - Considérations sur la solution matricielle du problème portant instationnaire en subsonique, et applications aux gouvernes. O.N.S.R.A. - Note technique N° 135 (1968).
- (5) G. COUPRY - Pression induite sur une surface portante par une turbulence atmosphérique isotrope. C.R. AC. Sc. Paris, t. 268, série A, (1969), p.343-344.